Teorema de Laplace: toda la materia

1. definición
2. Matemáticas
3. ›
4. Matrices

O **Teorema de laplace** es un método para calcular el determinante de matrices cuadradas de orden *norte*. Suele utilizarse cuando las matrices son de orden igual o superior a 4.

Este método fue desarrollado por el matemático y físico Pierre-Simon Laplace (1749-1827).

¿Como calcular?

El teorema de Laplace se puede aplicar a cualquier matriz cuadrada. Sin embargo, para matrices de orden 2 y 3 es más fácil utilizar otros métodos.

Para calcular los determinantes debemos seguir los siguientes pasos:

1. Seleccionar una fila (fila o columna), dando preferencia a la fila que contenga el mayor número de elementos igual a cero, ya que simplifica los cálculos;
2. Suma los productos de los números de la fila seleccionados por sus respectivos cofactores.

Cofator

El cofactor de una matriz de orden $n \geq 2$ se define como:

$LA_{ij} = (-1)^{yo + j} . D_{ij}$

Dónde

LA_{ij}: cofactor de un elemento a_{ij}
i: línea donde se encuentra el elemento
j: columna donde se encuentra el elemento
D_{ij}: es el determinante de la matriz resultante de la eliminación de la fila i y la columna j.

Ejemplo

Determine el cofactor del elemento $a_{23,}$ de la matriz A indicada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución

Para calcular el cofactor del elemento a_{23}, comencemos calculando el determinante de la matriz resultante de la eliminación de la fila 2 y la columna 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cancel{2} \\ \cancel{-3} & \cancel{4} & \cancel{1} \\ 3 & 2 & \cancel{5} \end{vmatrix}$$

Entonces, calculemos el determinante de esta matriz:

$$D_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$$

El cofactor se encontrará reemplazando el valor de D_{23} en la expresión, como se indica a continuación:

$LA_{23} = (-1)^{2 + 3} . 1 = -1$

El cofactor A_{23}, de elemento a_{23} de la matriz dada, es igual a

-1.

Ahora que sabemos cómo determinar el cofactor de un elemento en una matriz, podemos aplicar el teorema de Laplace para calcular su determinante.

Ejemplo

Encuentre el determinante de la matriz B, que se indica a continuación.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución

Seleccionemos la línea 1, ya que hay un elemento igual a cero en ella.

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

El determinante se encontrará haciendo:

$$D = \sum a_{ij} \cdot A_{ij}$$

$$D = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14}$$

Linha 1 Coluna 1 Linha 1 Coluna 2 Linha 1 Coluna 3 Linha 1 Coluna 4

$$D = 4 \cdot A_{11} + 5 \cdot A_{12} + (-3) \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14}$$

A partir de aquí, como cero multiplicado por cualquier número es cero, el cálculo es más sencillo, porque en este caso el$_{14}$. LA$_{14}$ no es necesario calcularlo.

Así que calculemos cada cofactor:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} . \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1.41 = 41$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} . \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -1.7 = -7$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} . \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1.(-27) = -27$$

Tenga en cuenta que para determinar el cofactor, es necesario calcular el determinante de cada matriz de orden 3 indicada anteriormente. Para este tipo de matriz, el método más sencillo es aplicar la regla de Sarrus.

Sustituyendo los valores encontrados en la expresión del determinante, tenemos:

D = 4. 41 + 5. (-7) + (-3). (-27) = 164 – 35 + 81 = 210

Llegamos al resultado 210, que es el determinante de esta matriz 4×4 o matriz de cuarto orden.

Ejercicio resuelto

Usando el teorema de Laplace, calcule el determinante de la matriz de 5×5 que se indica a continuación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

En la primera columna de la matriz, casi todos los elementos son iguales a cero. Para hacerlo más fácil, elijamos esta columna.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

El determinante se encontrará haciendo:

D = 1. LA_{11} + 0. LA_{21} + 0. LA_{31} + 0. LA_{41} + 0. LA_{51}

El único cofactor que tendremos que calcular es A_{11}, ya que los demás se multiplicarán por cero. El valor de A_{11} se encontrará haciendo:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} . \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & 6 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Como vamos a calcular el determinante de una matriz de 4 órdenes, usaremos el teorema de Laplace nuevamente. Para este cálculo, elegimos la primera línea, ya que solo tiene un valor distinto de cero.

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & 6 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

D´ = 4. LA_{11} + 0. A ‘$_{12}$ + 0. LA’$_{13}$ + 0. LA’$_{14}$

Para calcular el determinante D ‘, solo necesitamos encontrar el valor de A’$_{11}$, porque los otros cofactores se multiplican por cero.

$$A'_{11} = (-1)^{1+1} . \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

De esta forma D ‘será igual a:

D ‘= 4. (-12) = – 48

Luego podemos calcular el determinante buscado, sustituyendo este valor en la expresión de A_{11}:

LA_{11} = 1. (-48) = – 48

Así, el determinante vendrá dado por:

$D = 1.\ A_{11} = -\ 48$

Por tanto, el determinante de la matriz de orden 5, es igual a **– 48**.

Para obtener más información, consulte también: